A matematika természete – a természet matematikája

A Bevezetés bevezetése: mi és a minket körülvevő világ

„Földtől eloldja az eget
a hajnal s tiszta, lágy szavára
a bogarak, a gyerekek
kipörögnek a napvilágra;
a levegőben semmi pára,
a csilló könnyűség lebeg!
Az éjjel rászálltak a fákra,
mint kis lepkék, a levelek.

Kék, piros, sárga, összekent
képeket láttam álmaimban
és úgy éreztem, ez a rend –
egy szálló porszem el nem hibbant.
Most homályként száll tagjaimban
álmom s a vas világ a rend.
Nappal hold kél bennem s ha kinn van
az éj – egy nap süt idebent.

....

Akár egy halom hasított fa,
hever egymáson a világ,
szorítja, nyomja, összefogja
egyik dolog a másikát
s így mindenik determinált.
Csak ami nincs, annak van bokra,
csak ami lesz, az a virág,
ami van, széthull darabokra.”

(József Attila: Eszmélet /részlet/)

Platóni testek: (az öt szabályos poliéder):

- tetraéder (tűz)
- hexaéder (föld)
- oktaéder (levegő)
- dodekaéder (világmindenség alakja)
- ikozaéder (víz)

↳ szabályszerűségek
↳ a világ leírása ezek segítségével
↳ a matematika, mint megannyi szakterület segédeszköze
  ↳mathéma = tudomány (görög) $\boxed{?}$

→ vegyészet, mérnöki – de nemcsak:
→ csillagászat, földrajz – de nemcsak:
→ geológia, botanika, orvostudomány – de:
→ festészet, szobrászat, költészet, zene (!)

Bevezetés

↳ szabályszerűségek – a rendkívül széles skála $\boxed{?}$: osztódás, hópelyhek, növények, idomok, bolygók, csigaház, páfrány,
növekedés!
↳kis majom-nagy majom, kis párduc-nagy párduc

↳ a matematika ezek leírására $\boxed{?}$

↳ sorozatok $\boxed{?}$

↳ idő múlása

↳ osztódás

↳ Fibonacci $\boxed{?}$

↳ Lucas $\boxed{?}$ ↴

0	1	2	3	4	5
1	2	4	8	16	32
0	1	1	2	3	5
1	ϕ	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5

↳ számok $\boxed{?}$

↳ p

↳ q

↳ π → Ludolph-féle szám $\boxed{?}$
(Ludolph van Ceulen, 1550-1617; 35 tizedesjegyig számolta ki a π-t, de maga a „π” elnevezés csak 1739 óta Euler javaslatára)

→ előállítása: • Wallis 1659, végtelen szorzatként:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\ldots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

• Leibniz 1673, végtelen összegként:

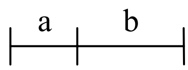
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$

↳ e → Euler-féle szám $\boxed{?}$

→ előállítása: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (érd: $\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$)

↳ ϕ ↴ → ϕ=1,618033989

→ előállítása:



$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$$

$$\frac{b}{1}=\frac{1+b}{b}$$

$$b^2-b-1=0$$

Előadás

1. A Fibonacci-sorozat

Leonardo Pisano Fibonacci, 1170-1250: Itáliából az arab világba került, megismerte az arab kultúrát és tudományokat; sokat foglalkozott az arab matematikával.

A sorozat rekurzív képlete: $a_1=1$ $a_2=1$ $a_n=a_{n-2}\cdot a_{n-1}$

↳ nyulak $\boxed{?}$ ↴

↳

	1	1	2	3	5	8
+		1	1	2	3	5
	1	2	3	5	8	13

↳ minden *n*-edik tag osztható *n*-nel:

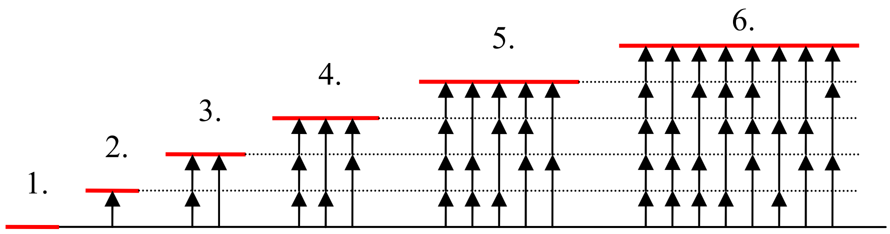
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	5	8	13	21

Bizonyítás: $a_n | a_n$ (a_n osztója a_n –nek; $a|b \rightarrow$ *a* osztója *b*-nek)

n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5
a_n	a_{n+1}	(a_n+a_{n+1})	(a_n+2a_{n+1})	$(2a_n+3a_{n+1})$	$(3a_n+5a_{n+1})$

↳ lépcső

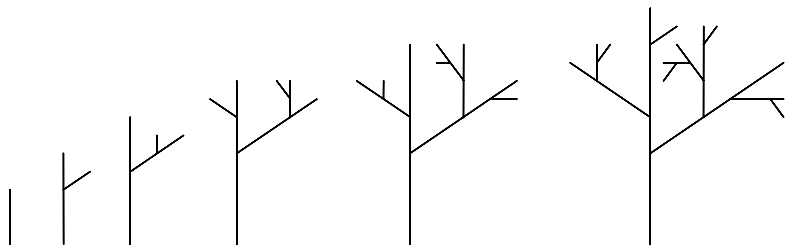
Lépcsőn felfelé haladva, egyszerre csak egy vagy két lépcsőfokot lépve hányféleképpen juthatunk fel az *n*-edik lépcsőfokra? (Ahol állunk, az az 1-es lépcső.)



1 2 3 5 8

↳ fa növekedése (nyulak ↥)

„Hány pár nyúl származhat egyetlen pártól, ha két hónap alatt válnak ivaréretttekké, és minden hónapban születik egy pár nyúl?"



1 2 3 5 8 13

↳ „ugyanaz kicsiben, mint nagyban" (fraktálok)

önhasonlóság: a sorozat definíciójából következik

↳ a számtani sorozat szintén, DE! *p*-függő

↳ a mértani sorozat szintén, DE! *q*-függő

↳ egy (arányossági) tényező írja le őket

↳ több is létezik belőlük

↳ nem önhasonlóak, hanem *p*/*q*-hasonlóak

(Megjegyzés: az $a_n = a_{n-2} \cdot a_{n-1}$ sorozat:

1	2	3	4	5	6	7	8
2^0	2^1	2^1	2^2	2^3	2^5	2^8	2^{13}

→ nem „teljesen" önhasonló, 2 alapú → ettől eltekintve igen → Fibonacci-sorozat) önhasonlóság → nagyon gyakori a természetben (kis majom – nagy majom)

↳ növények szárán a rügyek, levelek, ágak elhelyezkedése

↳ NEM VÉLETLEN, DE! A Fibonacci-sorozaton túl (de vele mégis összhangban) más is leírja a jelenséget ⍰

↳ a sorozat egymást követő tagjának hányadosai ϕ-hez tartanak ↴

↳ számok ⮥ ϕ ⍰

2. Az aranymetszés és a Lucas-sorozat

↳ a ϕ

↳ előállítása ⮥, elnevezése: (90 évvel ezelőtt M. Barr javaslatára:) Pheidiasz-ról

↳ $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ → az egyetlen (!) ilyen szám

↳ arany négyszög

↳ logaritmikus spirális

↳ az egyetlen olyan spirális, amely nem változtatja az alakját, miközben növekszik

↳ napraforgó (34 spirális fordul az egyik, 55 a másik irányba; kisebb esetekben 21/34 vagy 13/21; de ilyen pl. a dália is), csigaház

↳ az aranymetszés és a Fibonacci-sorozat

Mértani sorozat: → a második tagtól kezdve bármely elem az előtte lévő és őt követő elem mértani középarányosa. Másképpen fogalmazva: a középső elem négyzete a vele közvetlenül szomszédos elemek szorzatával egyenlő. A Fibonacci-sorozat esetén: a sorozat bármely elemének a négyzete (a másodiktól kezdve) a szomszédos elemek szorzatánál egyel kisebb vagy egyel nagyobb.

n	a_n	$q = a_n^2$	$p = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$	$q - p$
1	1	1		
2	1	1	$1 \cdot 2 = 2$	$1 - 2 = -1$
3	2	4	$1 \cdot 3 = 3$	$4 - 3 = +1$
4	3	9	$2 \cdot 5 = 10$	$9 - 10 = -1$
5	5	25	$3 \cdot 8 = 24$	$25 - 24 = +1$
6	8	64	$5 \cdot 13 = 65$	$64 - 65 = -1$

↳ a Lucas-sorozat

↳ rekurzív módon képezhető, de mértani is egyben:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} \qquad \frac{b}{a} = \phi =: q$$

$$\phi = \frac{1}{\phi} + 1 \qquad \Big| \cdot \phi$$

$$\phi^2 = 1 + \phi$$

$$\phi^3 = \phi + \phi^2 \qquad \text{stb...}$$

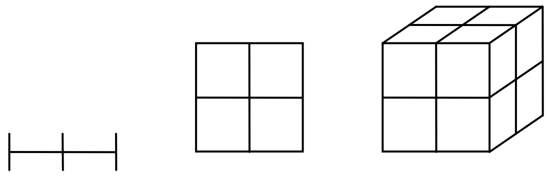
3. Fraktálok

↳ definíció $\boxed{?}$

↳ önhasonló alakzatok

↳ „ugyanaz kicsiben, mint nagyban”

↳ a nem egész dimenziójú alakzatok



1 2 3

↳ fa-fraktál ↥, csigaház, hópehely, növekedés (!)

↳ bolygók mozgása

↳ Pascal-háromszög $\boxed{?}$

↳ genetika: allélok $\boxed{?}$

Mellékletek

1. A hang

Az emberi érzékelés olyan természetű, hogy az egymás után megszólaló hangokat akkor érzi azonos távolságra egymástól, ha az alaphangok aránya, és nem a különbsége egyezik meg. Több egyszerre megszólaló hang lehet *konszonáns* vagy *disszonáns* (kellemes vagy kellemetlen benyomást keltenek együtt). Két hang akkor konszonáns, ha a hangközük kis egész számok arányával írható le.

Abszolút konszonáns:	oktáv	2:1
Teljes konszonancia:	kvint	3:2
	kvart	4:3
Közepesen konszonáns:	nagy terc	5:4
	nagy szext	5:3
Konszonáns még (3 hang):	a dúr	$1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}$ és
	a moll	$1:\frac{6}{5}:\frac{3}{2}$ hármashangzat.

2. Az *e* és 1/*e* előállítása

1	2	0
2	2,25	0,25
3	2,3704	0,2963
4	2,4414	0,3164
5	2,4883	0,3277
6	2,5216	0,3349
7	2,5465	0,3399
8	2,5658	0,3436
9	2,5812	0,3464
10	2,5937	0,3487
11	2,6042	0,3505
12	2,613	0,3520
13	2,6206	0,3533
14	2,6272	0,3543
1,E+06	2,71828	0,367879

3. A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjának hányadosai ϕ-hez tartanak

1	
1	1
2	2
3	1,5
5	1,6667
8	1,6
13	1,625
21	1,6154
34	1,6190
55	1,6176
89	1,6182

4. A Lucas-sorozat

ϕ^0	1
ϕ^1	1,61803
ϕ^2	2,61803
ϕ^3	4,23607
ϕ^4	6,8541
ϕ^5	11,0902
ϕ^6	17,9443
ϕ^7	29,0344
ϕ^8	46,9787
ϕ^9	76,0132
ϕ^{10}	122,992

5. Allélok: AaBbCc × AaBbCc

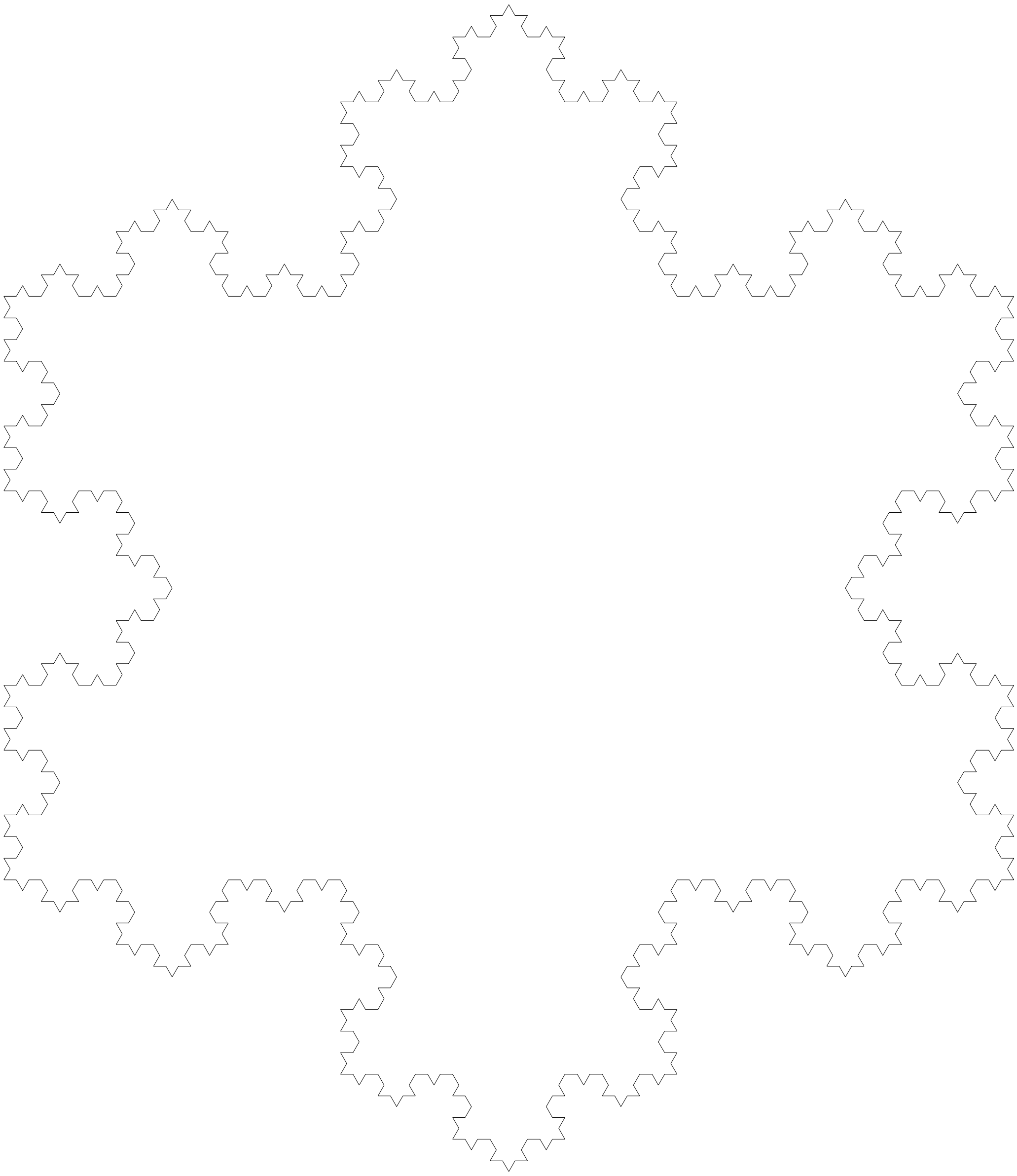
ABC	AABBCC	AABBCc	AABbCC	AABbCc	AaBBCC	AaBBCc	AaBbCC	AaBbCc
ABc	AABBCc	AABBcc	AABbCc	AABbcc	AaBBCc	AaBBcc	AaBbCc	AaBbcc
AbC	AABbCC	AABbCc	AAbbCC	AAbbCc	AaBbCC	AaBbCc	AabbCC	AabbCc
Abc	AABbCc	AABbcc	AAbbCc	Aabbcc	AaBbCc	AaBbcc	AabbCc	Aabbcc
aBC	AaBBCC	AaBBCc	AaBbCC	AaBbCc	aaBBCC	aaBBCc	aaBbCC	aaBbCc
aBc	AaBBCc	AaBBcc	AaBbCc	AaBbcc	aaBBCc	aaBBcc	aaBbCc	aaBbcc
abC	AaBbCC	AaBbCc	AabbCC	AabbCc	aaBbCC	aaBbCc	aabbCC	aabbCc
abc	AaBbCc	AaBbcc	AabbCc	Aabbcc	aaBbCc	aaBbcc	aabbCc	aabbcc

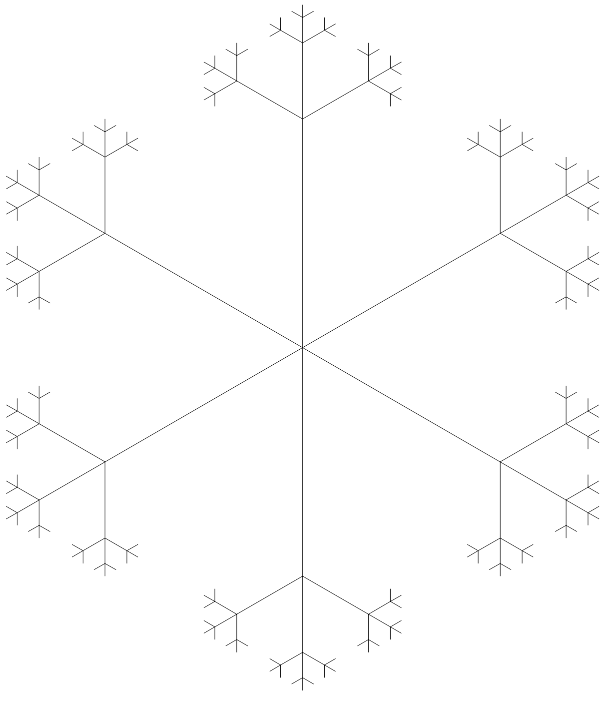
A	magas	növekedésű
a	alacsony	
B	zöld	hüvelyű
b	sárga	
C	sima	héjú
c	ráncos	

A, B, C: domináns allél
a, b, c: recesszív allél

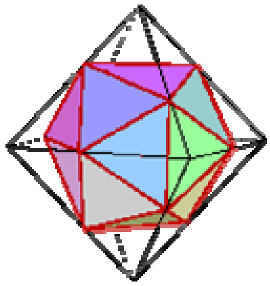
	Minőség			Darab
1.	magas	zöld	sima	27
2.	magas	zöld	ráncos	9
3.	magas	sárga	sima	9
4.	magas	sárga	ráncos	3
5.	alacsony	zöld	sima	9
6.	alacsony	zöld	ráncos	3
7.	alacsony	sárga	sima	3
8.	alacsony	sárga	ráncos	1

6. Fraktálok



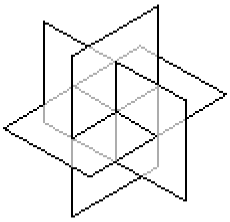


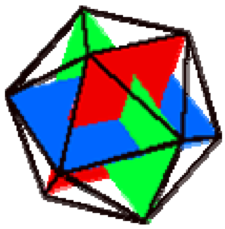
7. Az aranymetszés térgeometriája



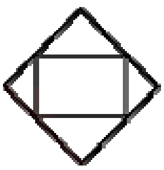
A legkülönlegesebb kapcsolat az ikoza- és az oktaéder között figyelhető meg. Az oktaéder egy ikozaédert rejt magában oly módon, hogyha az oktaéder éleinek aranymetsző pontjait összekötjük egy ikozaédert kapunk eredményül.

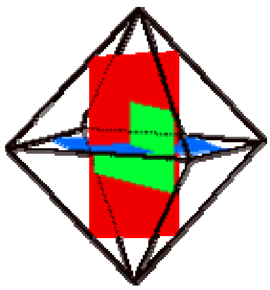
Hogy hogyan lehetséges ez, egyből előtűnik, ha a két test „vázát" vesszük szemügyre. Ha három aranytéglalapot speciális helyzetbe állítunk, azaz egymásra merőleges és egymást metsző helyzetbe hozunk, a kapott „kereszt" éppen egy ikozaédert eredményez.

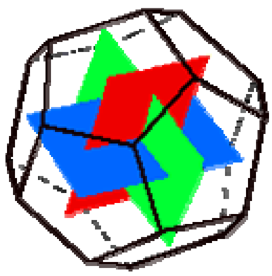




Ebből a „vázból" pedig úgy jutunk el az oktaéder „vázáig", hogy a téglalapokat négyzetekké egészítjük ki. Az aranytéglalap és a köré írható négyzet úgy helyezkednek el egymáshoz képest, hogy a négyzet oldalainak megfelelő aranymetsző pontjai határozzák meg a téglalap csúcspontjait. Ebből a tényből, valamint abból, hogy a három egymást metsző négyzet egy oktaédert határoz meg, egyértelműen következik, hogy az oktaéder éleinek aranymetsző pontjai egy ikozaéder csúcspontjai lesznek.





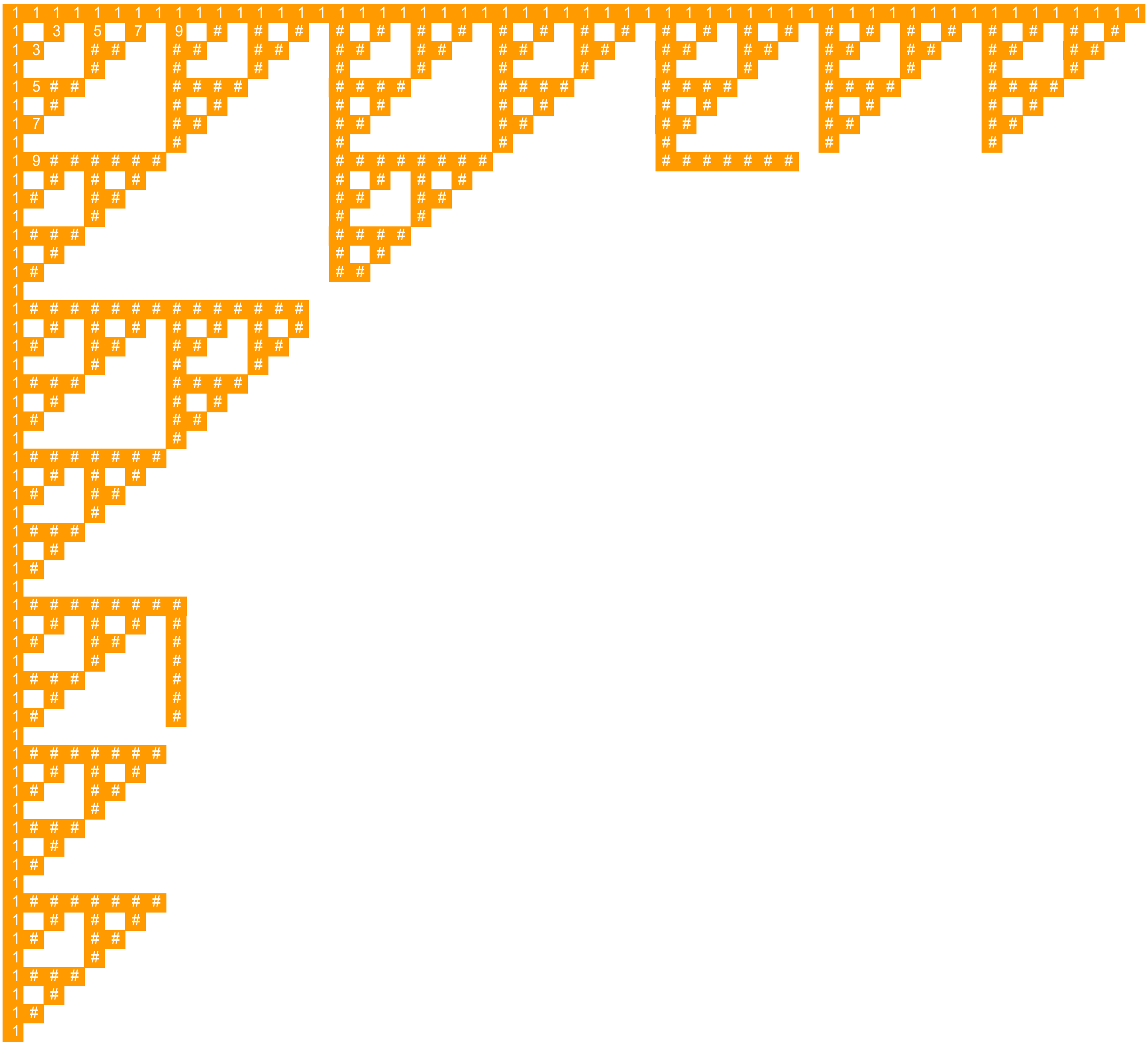


De vajon mi köze mindehhez a dodekaédernek? Ez a „triumvirátus" benne is megtalálható, csak még jobban elrejtve.

A dodekaéder és az ikozaéder között egy különleges kapcsolat van. Ez a két test egymásnak duálisa, ami azt jelenti, hogy az egyik lapközéppontjai a másik csúcspontjait határozzák meg. Tehát az ikozaéder csúcspontjai egy dodekaéder lapközéppontjait határozzák meg, ami azt jelenti, hogy a három aranytéglalap csúcsai ezúttal egy dodekaéder lapközéppontjaival egyeznek meg:

8. Pascal-háromszög

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628		
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132			
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388				
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582					
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378						
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378							
1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582								
1	13	91	455	1820	6188	18564	50388									
1	14	105	560	2380	8568	27132										
1	15	120	680	3060	11628											
1	16	136	816	3876												
1	17	153	969													



$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\ldots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$ Wallis

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$ Leibniz

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$$

$$\frac{b}{1}=\frac{1+b}{b}$$

$$b^{2}-b-1=0$$

A Fibonacci-sorozat és a Lucas-sorozat

		ϕ^{0}	1
1		ϕ^{1}	1,61803
1	1	ϕ^{2}	2,61803
2	2	ϕ^{3}	4,23607
3	1,5	ϕ^{4}	6,8541
5	1,6667	ϕ^{5}	11,0902
8	1,6	ϕ^{6}	17,9443
13	1,625	ϕ^{7}	29,0344
21	1,6154	ϕ^{8}	46,9787
34	1,6190	ϕ^{9}	76,0132
55	1,6176	ϕ^{10}	122,992
89	1,6182		

A matematika természete – a természet matematikája

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\ldots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$ Wallis

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$ Leibniz

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

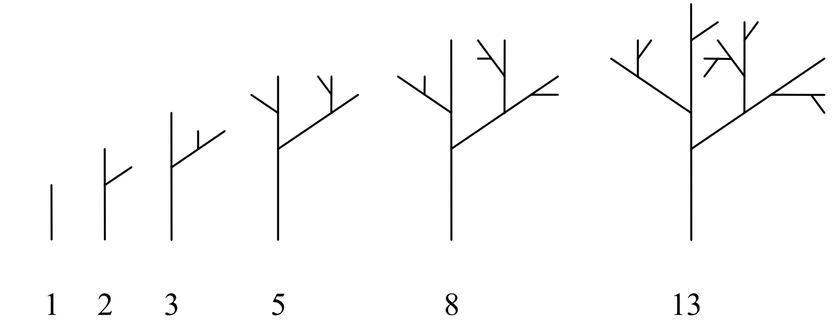
$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$$

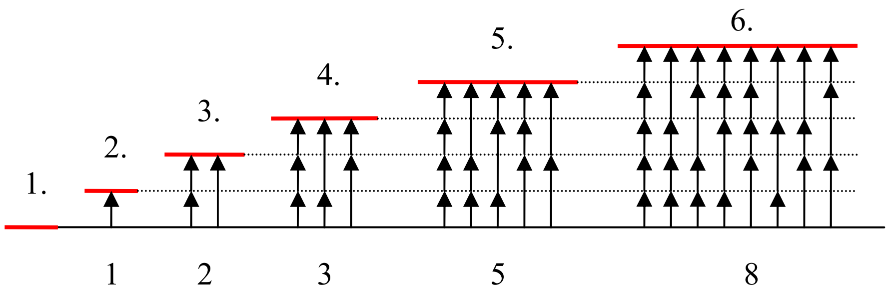
$$\frac{b}{1}=\frac{1+b}{b}$$

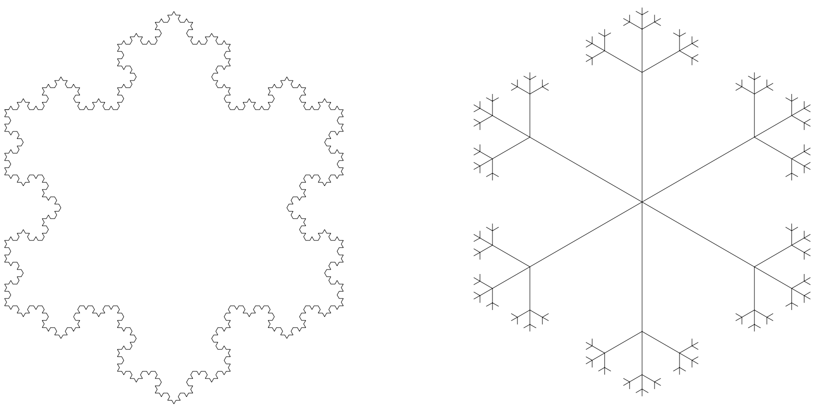
$$b^{2}-b-1=0$$

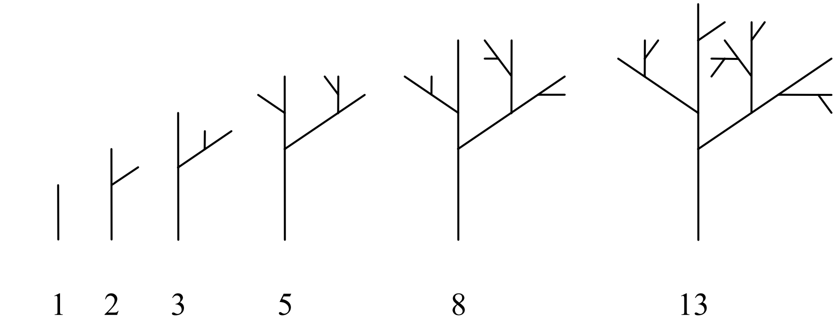
A Fibonacci-sorozat és a Lucas-sorozat

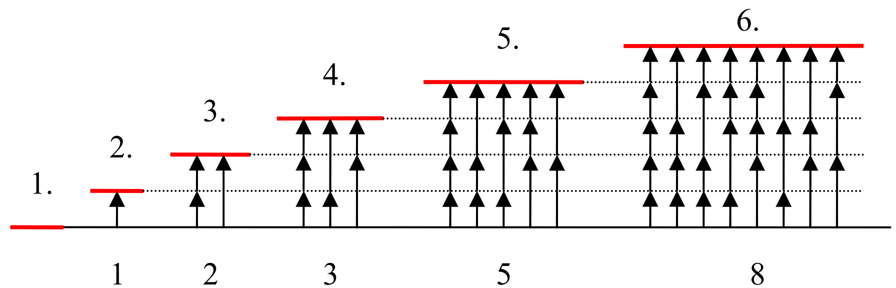
		ϕ^{0}	1
1		ϕ^{1}	1,61803
1	1	ϕ^{2}	2,61803
2	2	ϕ^{3}	4,23607
3	1,5	ϕ^{4}	6,8541
5	1,6667	ϕ^{5}	11,0902
8	1,6	ϕ^{6}	17,9443
13	1,625	ϕ^{7}	29,0344
21	1,6154	ϕ^{8}	46,9787
34	1,6190	ϕ^{9}	76,0132
55	1,6176	ϕ^{10}	122,992
89	1,6182		


1
2
3
5
8
13


1.
2.
3.
4.
5.
6.
1
2
3
5
8




1
2
3
5
8
13


1.
2.
3.
4.
5.
6.
1
2
3
5
8